С. И. Синеговский

Астрофизика высоких энергий 2018 г.

Лекции 8-10

Стохастический механизм ускорения заряженных частиц (1)

$$E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_i \cup \ldots \qquad P\left(E_1 \cup \ldots \cup E_i \cup \ldots\right) = \sum_i P(E_i)$$

$$E_1 = E_0\left(1 + \frac{\Delta E}{E_0}\right), \quad E_2 = E_1(1+\xi) = E_0(1+\xi)^2, \quad P(E_1) = w_{01}, \qquad P(E_2) = w_{01} \cdot w_{12}, \cdots, P(E_k) = \prod_{i=1}^{k} w_{i-1i} = w^k$$

$E_{k+1} = E_k(1+\xi)$, **где** $w_{ii+1} = \text{const}$, $\xi = (E_{k+1} - E_k)/E_k \equiv \langle \Delta E/E \rangle = \text{const}$

На n-м шаге $E = E_n = E_0\left(1+\xi\right)^n, \quad n = \ln\left(E/E_0\right)/\ln\left(1+\xi\right)$

<u>Интегральный спектр КЛ</u>

$$P(E + \Delta E) = wP(E) = w \cdot w^n = w^{n+1}$$

$$N(>E) = A\sum_{k=n}^{\infty} P(E_k) = A\sum_{k=n}^{\infty} w^k = A\sum_{l=0}^{\infty} w^{l+n} = Aw^n/(1-w) = \frac{A}{1-w} w^{\frac{\ln(E/E_0)}{\ln(1+\xi)}},$$

$$N(>E) = \frac{A}{1-w}\exp\left(\frac{\ln(E/E_0)}{\ln(1+\xi)}\ln w\right) = \frac{A}{1-w}\left(\frac{E}{E_0}\right)^{-\alpha},$$ **где** $$\alpha = -\frac{\ln w}{\ln(1+\xi)}.$$

Стохастический механизм ускорения заряженных частиц (2)

Или определив $w = \exp(-\tau_{collis}/\tau_{\text{escape}})$ $\quad n = \ln\left(E/E_0\right)/\ln\left(1+\xi\right)$

$$N(>E) = A\sum_{k=n}^{\infty}\exp(-k\tau_{collis}/\tau_{\text{escape}}) = A\exp(-n\tau_{col}/\tau_{\text{esc}})\sum_{m=0}^{\infty}\exp(-m\tau_{col}/\tau_{\text{esc}}) = \frac{A\exp(-n\tau_{col}/\tau_{\text{esc}})}{1-\exp(-\tau_{col}/\tau_{\text{esc}})}$$

$$N(>E) = \frac{A\exp\left(-\dfrac{\tau_{col}\ln(E/E_0)}{\tau_{\text{esc}}\ln(1+\xi)}\right)}{1-\exp(-\tau_{col}/\tau_{\text{esc}})} = A\frac{(E/E_0)^{-\alpha}}{1-\exp(-\tau_{col}/\tau_{\text{esc}})}, \qquad \alpha = \frac{\tau_{\text{col}}}{\tau_{\text{esc}}\ln(1+\xi)} \approx \frac{\tau_{\text{col}}}{\tau_{\text{esc}}\xi}.$$

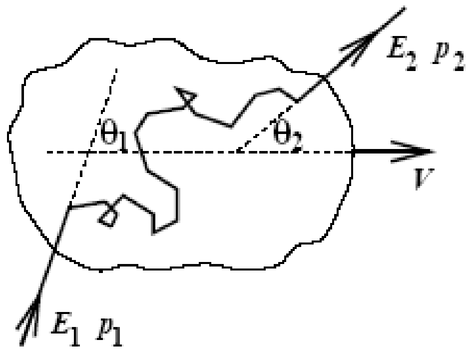
Для $\tau_{col} << \tau_{esc}$ $\Rightarrow$ $N(>E) = A\dfrac{\tau_{\text{esc}}}{\tau_{col}}(E/E_0)^{-\alpha}$

Дифференциальный спектр КЛ

$$\frac{dN(E)}{dE} = N_0(E/E_0)^{-(\alpha+1)}, \qquad N_0 = \frac{A\alpha}{E_0(1-\exp(-\tau_{col}/\tau_{\text{esc}}))}$$

Механизм Ферми ускорения 2-го порядка (1)

$$E' = \frac{E - \vec{p}\vec{V}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad p'_x = \frac{p_x - EV_x/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \qquad \beta = \frac{V}{\mathrm{v}_{CR}} \approx \frac{V}{\mathrm{c}}, \; \Gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2},$$



$$E_1' = \Gamma E_1 (1 - \beta\cos\theta_1), \qquad E \approx pc\,.$$

$$E_2 = \Gamma E_2'(1 + \beta\cos\theta_2') = \Gamma E_1'(1 + \beta\cos\theta_2'),$$

$$E_2 = \Gamma^2 E_1 (1 - \beta\cos\theta_1)(1 + \beta\cos\theta_2') \qquad (E_2' = E_1'$$ - упругое взаимодействие)

$$\frac{\Delta E}{E_1} = \frac{E_2 - E_1}{E_1} = \frac{E_1(1-\beta\cos\theta_1)(1+\beta\cos\theta_2')}{(1-\beta^2)E_1} - 1 = \frac{(1-\beta\cos\theta_1)(1+\beta\cos\theta_2')}{(1-\beta^2)} - 1$$

Угловое распределение по θ_2': $\quad \frac{dn}{d\cos\theta_2'} = const \qquad -1 \le \cos\theta_2' \le 1$

Нормировка: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dn}{d\cos\theta_2'} d\cos\theta_2' = 2\,\mathrm{const} = 1 \qquad const = 1/2 \qquad \frac{dn}{d\cos\theta_2'} = \frac{1}{2} \qquad \langle\cos\theta_2'\rangle_{\theta_2'} = 0$

Угловое распределение по θ_1 . определяется частотой столкновения частицы с облаком:

$$\frac{dn}{d\cos\theta_1} = \frac{c - V\cos\theta_1}{2c} = \frac{1 - \beta\cos\theta_1}{2} \qquad -1 \le \cos\theta_1 \le 1$$

Механизм Ферми ускорения 2-го порядка (2)

Усредним по углам θ_2' и θ_1 выражение $\dfrac{\Delta E}{E_1} = \dfrac{1-\beta\cos\theta_1 + \beta\cos\theta_2' - \beta^2\cos\theta_1\cos\theta_2'}{1-\beta^2} - 1:$

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E_1} \right\rangle_{\theta_2'} = \frac{1-\beta\cos\theta_1}{1-\beta^2} - 1$$

т. к. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\beta\cos\theta_2' - \beta^2\cos\theta_1\cos\theta_2'}{1-\beta^2} d\cos\theta_2' = 0,$ то $\displaystyle\xi = \left\langle \left\langle \frac{\Delta E}{E_1} \right\rangle_{\theta_2'} \right\rangle_{\theta_1} = \frac{1-\beta\langle\cos\theta_1\rangle_{\theta_1}}{1-\beta^2} - 1$

$$\langle\cos\theta_1\rangle_{\theta_1} = \int_{-1}^{1} \frac{1-\beta\cos\theta_1}{2}\cos\theta_1 d\cos\theta_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\theta_1}{2}\bigg|_{-1}^{1} - \beta\frac{\cos^3\theta_1}{3}\bigg|_{-1}^{1} \right) = -\frac{\beta}{3} \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{1+\beta^2/3}{1-\beta^2} - 1 = \frac{4}{3}\cdot\frac{\beta^2}{1-\beta^2}$$

При $\beta << 1$ $\quad\displaystyle\xi = \frac{4}{3}\cdot\frac{\beta^2}{1-\beta^2} \simeq \frac{4}{3}\beta^2$

Комментарий к процессу образования УВ (1)

скорость звука $c_s = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{\mu}},$ **число Маха** $M = \dfrac{u}{c_s},$

$$V_T \equiv \sqrt{<V^2>} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = (3/\gamma)^{1/2} c_s, \quad \frac{\varepsilon_{\text{kin}}}{\varepsilon} = \frac{u^2}{V_T^2} = \frac{\gamma u^2}{3c_s^2} = \frac{\gamma}{3} M^2. \quad \Rightarrow \quad M = \sqrt{\frac{3\varepsilon_{\text{kin}}}{\gamma\varepsilon}}$$

($\varepsilon = U/m$ – внутр.энергия на ед. массы, ε_{kin} – кин. энергия направленного движ. ед. массы газа)

M **< 1 - дозвуковое течение газа:** ε_{kin} **много меньше энергии теплового движения** ε **;**

M **= 1 - звуковое течение,** $\varepsilon_{kin} < \varepsilon$ **;**

1 < ***M*** **<** $(3/\gamma)^{1/2}$ **(т. е.** $\varepsilon_{kin} < \varepsilon$ **) - сверхзвуковое течение;**

M **>** $(3/\gamma)^{1/2}$ **(т.е.** $\varepsilon_{kin} > \varepsilon$ **) - сверхзвуковое течение.**

Комментарий к процессу образования УВ (2)

Возникающее при движении поршня возмущение распространяется в адиаб. процессе со скоростью звука, температура повышается и новая волна возмущений будет распространяться с большой скоростью и догонять предшествующие волны. Так создается мощная волна сжатия, которую называют ударной волной.

После образования УВ параметры газа $(\mathbf{u}, \rho, P, T, S)$ по обе стороны фронта УВ будут иметь различные значения, т.е. фронт представляет поверхность разрыва физических величин (меняются скачком). По обе стороны от фронта газ (жидкость) находится в термодинамически однородном состоянии.

Если толщина фронта мала, $\delta h << \ell_{\mathrm{scat}}$, то его структура практически не оказывает влияния на движение быстрых частиц по обе стороны УВ.

Но именно в переходном слое УВ происходят необратимые (неравновесные) процессы, приводящие к диссипации энергии и росту энтропии. Этими деталями мы здесь не интересуемся.

Ударные волны

УВ всегда движется из области с высоким давлением в область с меньшим давлением $P_2 > P_1$ (*теорема Цемплена*).

Разрывы (законы сохранения)

$$u_1^2 - u_2^2 = -\frac{(P_1 - P_2)(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1 \rho_2}, ???$$

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

$$P_1 + \rho_1 u_1^2 = P_2 + \rho_2 u_2^2$$

$$\varepsilon_1 + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = \varepsilon_2 + \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2}$$

Уравнения гидродинамики

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{u}) = 0, \quad (1)$$

уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho}, \quad (2)$$

уравнение Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho u^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = -\vec{\nabla}\left[\rho\vec{u}\left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{P}{\rho}\right)\right]. \quad (3)$$

уравнение потока энергии

Ударная адиабата (Ренкина –Гюгоньо)

$$P_1 - P_2 = \rho_1 u_1^2 (\rho_1 / \rho_2 - 1) \Longrightarrow u_1^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{P_1 - P_2}{\rho_1 - \rho_2}, \quad u_2^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{P_1 - P_2}{\rho_1 - \rho_2}, \quad u_1^2 - u_2^2 = -\frac{(P_1 - P_2)(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1 \rho_2},$$

$$\rho_2 > \rho_1, \qquad u_2 < u_1.$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{(P_1 + P_2)(\rho_1 - \rho_2)}{2\rho_1 \rho_2}$$

или

$$h_1 - h_2 = \frac{(P_1 - P_2)(\rho_2 + \rho_1)}{2\rho_1 \rho_2},$$

где $h = \varepsilon + P/\rho.$

$$c_{s1}^2 \le \frac{P_2 - P_1}{\rho_2 - \rho_1} \le c_{s2}^2 \Longrightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} c_{s1}^2 < \frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{P_2 - P_1}{\rho_2 - \rho_1}\right) = u_1^2 \xrightarrow{\rho_2/\rho_1 > 1} u_1 > c_{s1}$$

(сверхзвуковое течение перед фронтом УВ)

Аналогично $u_2 < c_{s2}$ **(дозвуковое течение за фронтом УВ)**

Полезные формулы и ссылки

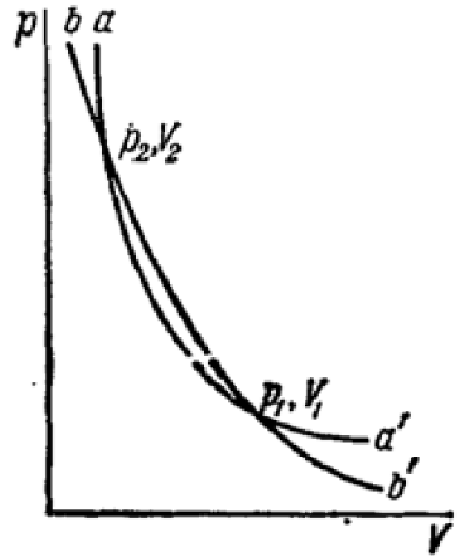
$j = \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$ **– плотность потока газа через фронт УВ**

$$P_1 + \rho_1 u_1^2 = P_2 + \rho_2 u_2^2 \quad \Rightarrow \quad j^2 = \frac{(P_2 - P_1)\rho_1\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{P_2 - P_1}{\tilde{V}_1 - \tilde{V}_2}$$

$$\tilde{V}_1 = 1/\rho_1, \quad \tilde{V}_2 = 1/\rho_2$$

Ударная адиабата

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{(P_1 + P_2)(\rho_1 - \rho_2)}{2\rho_1\rho_2} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)(\tilde{V}_2 - \tilde{V}_1)$$



Ударные волны в политропном газе

Покажем $\sigma = \dfrac{\rho_2}{\rho_1} = \dfrac{u_1}{u_2} = \dfrac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2+2}$, где $M_1 = \dfrac{u_1}{c_{s1}}$ - число Маха.

$$P = \frac{\rho}{\mu} RT, \quad \varepsilon = \frac{P}{\rho(\gamma-1)} \Rightarrow \varepsilon_1 + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = \varepsilon_2 + \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} \Rightarrow \frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1}\right) = \frac{u_1^2 - u_2^2}{2}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1}\right) = \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} \xrightarrow{P_1+\rho_1 u_1^2 = P_2 + \rho_2 u_2^2} \frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{P_1 + \rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1}\right) = \frac{u_1^2}{2}(1 - 1/\sigma^2)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\left[\frac{P_1}{\rho_1}\left(\frac{1}{\sigma}-1\right) + u_1^2\left(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\sigma^2}\right)\right] = \frac{u_1^2}{2}\left(1-\frac{1}{\sigma^2}\right) \xrightarrow{c_{s1}^2 = \gamma(P_1/\rho_1)} -\frac{1}{\gamma-1}\frac{\sigma-1}{\sigma} + \frac{\gamma M_1^2}{\gamma-1}\frac{\sigma-1}{\sigma^2} = \frac{M_1^2}{2}\frac{\sigma^2-1}{\sigma^2}$$

$$\sigma = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2+2}$$

$$\sigma = \frac{\gamma+1}{\gamma-1+2/M_1^2} \xrightarrow[\gamma=5/3]{} \sigma = \frac{4}{1+3/M_1^2} \xrightarrow[M_1 \gg 1]{} \sigma \approx 4\left(1 - \frac{3}{M_1^2}\right)$$

При $M_1 \gg 1$ и $\gamma = 4/3$ (доминирующий вклад излучения) имеем $\sigma = \dfrac{\rho_2}{\rho_1} = \dfrac{P_2}{P_1} \approx \dfrac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)} = 7$

против $\sigma \simeq 4$ (нерелятивистский газ)

особое поведение УВ

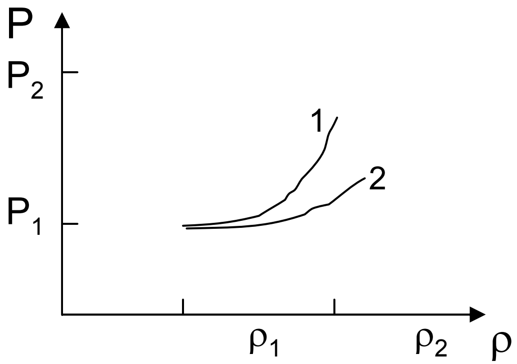
Ударная адиабата в политропном газе

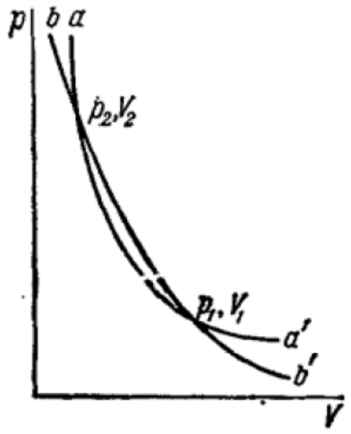
$$\sigma = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2+2}, \quad M_1 = \frac{u_1}{c_{s1}}$$ **- число Маха** $$\varepsilon = \frac{P}{\rho(\gamma-1)} \Rightarrow \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \frac{(P_1+P_2)(\rho_2-\rho_1)}{2\rho_1\rho_2}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{(\gamma+1)\rho_2 - (\gamma-1)\rho_1}{(\gamma+1)\rho_1 - (\gamma-1)\rho_2} \Leftrightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)P_2 + (\gamma-1)P_1}{(\gamma-1)P_2 + (\gamma+1)P_1} \qquad (7)$$

1 - ударная адиабата (Гюгоньо)

2 – адиабата Пуассона $P\rho^{-\gamma}$ =const





$V \equiv V = 1/\rho = V/\mu$

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_{max} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad P_1/P_2 \to 0.$$

Отличие УА от АП:

АП – однопараметрическое семейство кривых f(p,ρ)=const;

УА определяется заданием двух параметров – P_1, ρ_1

УВ движется со сверхзвуковой скоростью, поэтому возмущения из области за фронтом (2) не проникают в область перед ФУВ (1) и не влияют на состояние вещества там, и наоборот. Вместе со скачком *P и* ρ в УВ терпят разрыв температура и энтропия. Необратимость движения УВ обеспечивается процессами в тонком слое вблизи ФУВ и означает диссипацию энергии, т.е. возрастание энтропии в физических УВ. Разрывы параметров на ФУВ – это механизм, приводящий к диссипации энергии при движении идеальной жидкости .

Разработчики диффузионного механизма ускорения частиц ударной волной (Ферми 1-го порядка)

Е.Г. Бережко, Г.Ф. Крымский, УФН 1988. Т. 154. С. 49.

W.I. Axford et al. 15 ICRC, Plovdiv. 1977 V. 1. P. 132.

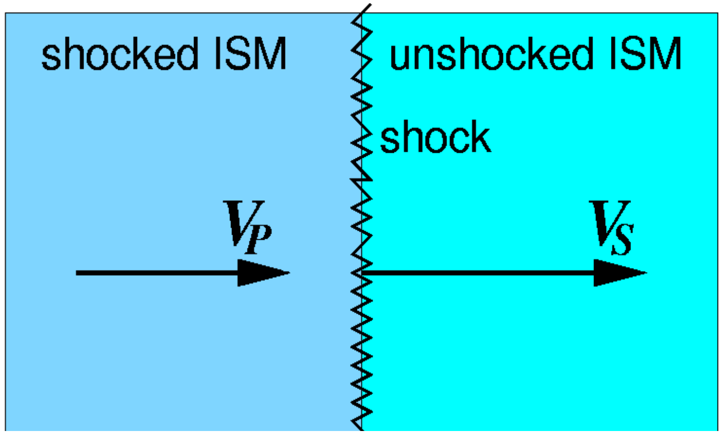
A.R. Bell, MNRAS 1978. V. 182. P. 147; P.443.

R.D. Blandford, J. R. Ostriker, ApJ 1978. V.221.P. L29

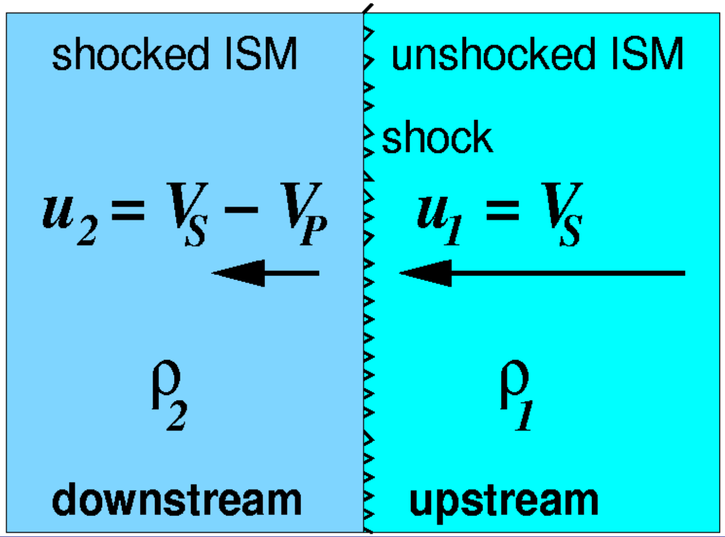
Система, где неподвижен газ МЗС (сопутствующая)

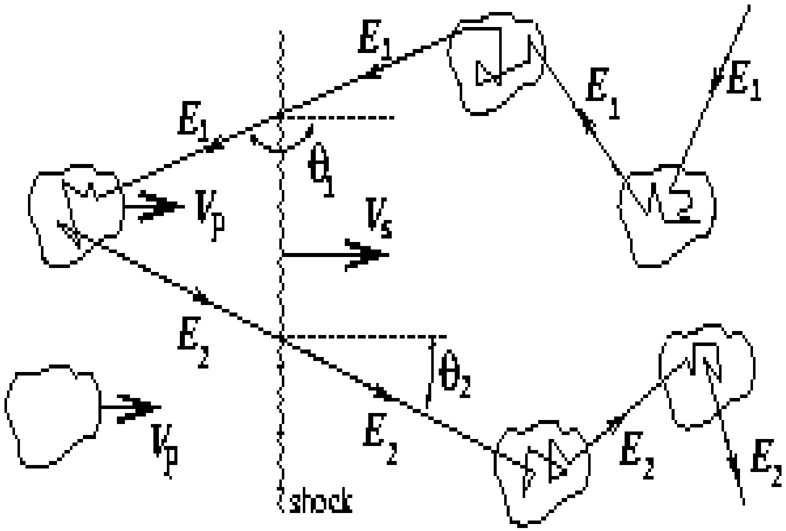
Система фронта УВ

(a) Upstream frame



(b) Shock frame





Диффузионный механизм - это ускорение заряженных частиц в результате многократного пересечения фронта УВ:

$$\left\langle\left\langle\frac{\Delta E}{E}\right\rangle\right\rangle_{\theta_2\,\theta_1} \cong \frac{4}{3}\frac{u_1-u_2}{c} = \frac{4}{3}\frac{V_P}{c} = \frac{4}{3}\beta$$

$$\sigma = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} \approx \frac{C_P/C_V+1}{C_P/C_V-1}$$ **или** $$\sigma = \frac{V_S}{V_S - V_P}$$

Диффузионный механизм (Ферми 1-го порядка)

Обозначения: V_S – **скорость фронта УВ**, $\vec{V}_P = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ - **скорость "поршня"**,

u_1 – **скорость течения газа перед фронтом**, u_2 - **скорость течения за фронтом** ;

В системе фронта УВ: $V_S = u_1,\quad u_2 = V_S - V_P,\quad M_1 = u_1 / c_{s1},\quad \beta = \dfrac{u_1 - u_2}{c} = \dfrac{V_P}{c}$

Распределения по углам θ_2' и θ_1 **для плоского фронта:**

$$\frac{dn}{d\cos\theta_2'} = 2\cos\theta_2' \qquad 0 \le \cos\theta_2' \le 1$$

$$\frac{dn}{d\cos\theta_1} = -2\cos\theta_1 \qquad -1 \le \cos\theta_1 \le 0$$

$$\frac{\Delta E}{E_1} = \frac{1-\beta\cos\theta_1 + \beta\cos\theta_2' - \beta^2\cos\theta_1\cos\theta_2'}{1-\beta^2} - 1, \qquad 2\int_0^1 \cos\theta_2'\cos\theta_2' d\cos\theta_2' = \frac{2}{3}\left(\cos\theta_2'\right)^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E_1} \right\rangle_{\theta_2'} = \frac{1-\beta\cos\theta_1 + \frac{2}{3}\beta - \frac{2}{3}\beta^2\cos\theta_1}{1-\beta^2} - 1, \qquad -2\int_{-1}^0 \cos\theta_1\cos\theta_1 d\cos\theta_1 = -\frac{2}{3}\left(\cos\theta_1\right)^3\Big|_{-1}^0 = -\frac{2}{3}$$

$$\xi = \left\langle \left\langle \frac{\Delta E}{E_1} \right\rangle_{\theta_2'} \right\rangle_{\theta_1} = \frac{1+\frac{2}{3}\beta + \frac{2}{3}\beta + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\beta^2}{1-\beta^2} - 1 = \frac{1+\frac{4}{3}\beta + \frac{4}{9}\beta^2}{1-\beta^2} - 1 \quad \approx 1 + \frac{4}{3}\beta - 1 = \frac{4}{3}\beta$$

Диффузия вблизи фронта УВ

α - спектральный индекс КЛ,

γ - индекс адиабаты Пуассона.

$$\alpha = \frac{\tau_{col}}{\tau_{\mathrm{esc}} \ln(1+\xi)} \approx \frac{\tau_{col}}{\tau_{\mathrm{esc}}\xi}, \quad w = \exp(-\tau_{collis} / \tau_{\mathrm{escape}})$$

$$w + w_{esc} = 1, \quad w_{esc} = 1 - w = 1 - \exp(-\tau_{col} / \tau_{esc}) \approx \frac{\tau_{col}}{\tau_{esc}}, \qquad \alpha \approx \frac{w_{esc}}{\xi}, \quad \xi \approx \frac{4}{3}\beta = \frac{4}{3}\frac{u_1 - u_2}{c}.$$

$$j_{CR} = \int_0^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot n_{CR} \cdot c \cdot \cos\theta = \frac{1}{4} n_{CR} c, \quad j_{esc} = n_{CR} u_2, \qquad w_{esc} = \frac{j_{esc}}{j_{CR}} = \frac{n_{CR} u_2}{n_{CR} c / 4} = 4\frac{u_2}{c} \ll 1.$$

степень сжатия

$$\sigma = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2 + 2} \xrightarrow{\gamma = 5/3} \alpha(\sigma) = \frac{4u_2}{c\xi} = \frac{3u_2}{u_1 - u_2} = \frac{3}{\sigma - 1} = \frac{M_1^2 + 3}{M_1^2 - 1} \approx 1 + \frac{4}{M_1^2}.$$

$$\sigma = \frac{4}{1 + 3/M_1^2}, \quad \frac{\sigma - 1}{3} = \frac{1 - 1/M_1^2}{1 + 3/M_1^2} \Rightarrow \alpha(\sigma) = \frac{1 + 3/M_1^2}{1 - 1/M_1^2} \approx 1 + 4/M_1^2 + 1/M_1^4$$

$$t_1 = \frac{I}{j_{CR}} = \frac{n_{CR} D_1 / u_1}{c n_{CR} / 4} = \frac{4D_1}{cu_1}$$

диффузия Бома

$$D_{\min} = \frac{1}{3} l_D c \Big|_{l_D = r_g} = \frac{1}{3} r_g c = \frac{pc^2}{3qB} \approx \frac{Ec}{3qB} \qquad (q = Ze)$$

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}$$

$$r_g = pc / (qB) \Rightarrow pc / \text{ГэВ} \approx 0.3Z(B / \text{Тл})\,(r_g / \text{м})$$

$$\Downarrow$$

$$pc \approx 300Z(B / \text{Гс})(r_g / \text{см})\ \text{эВ}$$

$$B_2 = \sigma B_1$$

$$\tau_{col} = t_1 + t_2 = \frac{4}{c}\left(\frac{D_1}{u_1} + \frac{D_2}{u_2}\right),$$

1 Тл [В·сек·м$^{-2}$]=10^4 Гс

Оценка времени цикла

$$\vec{J} = -D\vec{\nabla}n + n\vec{u}$$ - диффузия с учетом конвективного сноса частиц

$\vec{J} = 0$

$$D\vec{\nabla}n = n\vec{u}$$ - плотность потока частиц ~ градиенту концентрации

Для области перед плоским фронтом уравнение диффузии имеет вид

$$D_1 \frac{dn}{dx} = -u_1 n \quad \Rightarrow \quad n(x) = n_{\mathrm{CR}} \exp(-u_1 x / D_1)$$

Полное число частиц, падающих на един. площадку $I = \int_0^\infty n(x)dx = n_{\mathrm{CR}} D_1 / u_1 = j_{CR} t_1$

Отсюда $$t_1 = \frac{I}{j_{CR}} = \frac{n_{CR} D_1 / u_1}{c n_{CR} / 4} = \frac{4D_1}{c u_1};$$ также $$t_2 = \frac{4D_2}{c u_2}$$

где $j_{CR} = c n_{CR} / 4$ – проекция изотропного потока КЛ на плоскость фронта УВ.

$$\tau_{col} = t_1 + t_2 = \frac{4}{c}\left(\frac{D_1}{u_1} + \frac{D_2}{u_2}\right),$$

(Более подробно о диффузии и диффузионом пробеге см. лекции 9,10 - бумажные тексты)

Оценка максимальной энергии (1)

$$\frac{dE}{dt}=\frac{\xi E}{\tau_{col}},\qquad \xi\approx\frac{4}{3}\beta=\frac{4}{3}\frac{u_1-u_2}{c},\qquad \tau_{col}=t_1+t_2=\frac{4}{c}\left(\frac{D_1(E)}{u_1}+\frac{D_2(E)}{u_2}\right).$$

$$t_A=\int_0^{t_A}dt=\int_{E_0}^{E_{\max}}\frac{dE}{E}\frac{\tau_{col}}{\xi}=\frac{3}{u_1-u_2}\int_{E_0}^{E_{\max}}\frac{dE}{E}\left(\frac{D_1(E)}{u_1}+\frac{D_2(E)}{u_2}\right)$$

Бомова диффузия

$$D(E)\qquad D_{\min}=\frac{1}{3}l_Dc\Big|_{l_D=R_g}=\frac{1}{3}r_gc=\frac{pc^2}{3qB}\approx\frac{Ec}{3qB}$$

МГД разрыв $B_2=\sigma B_1=\frac{u_1}{u_2}B_1$ $\qquad u_2B_2=u_1B_1$

$$t_A=\frac{c}{u_1-u_2}\int_{E_0}^{E_{\max}}\frac{dE}{E}\left(\frac{1}{u_1B_1}+\frac{1}{u_2B_2}\right)\frac{E}{q}=\frac{2c}{Ze(u_1-u_2)u_1B_1}\int_{E_0}^{E_{\max}}dE=\frac{2c(E_{\max}-E_0)}{q(u_1-u_2)u_1B_1}$$

$(q=Ze)$

Оценка максимальной энергии (2)

$(q = Ze)$

$$t_A = \frac{c}{u_1 - u_2} \int_{E_0}^{E_{\max}} \frac{dE}{E} \left(\frac{1}{u_1 B_1} + \frac{1}{u_2 B_2} \right) \frac{E}{Ze} = \frac{2c}{Ze\left(u_1 - u_2\right) u_1 B_1} \int_{E_0}^{E_{\max}} dE = \frac{2c\left(E_{\max} - E_0\right)}{q\left(u_1 - u_2\right) u_1 B_1}$$

$$u_1 B_1 = u_2 B_2$$

$$E_{\max} \gg E_0 \quad \Rightarrow \quad t_A = \frac{2cE_{\max}}{\left(u_1 - u_2\right) u_1 B_1 Ze}$$

$$E_{\max} \le \frac{Ze}{2c}\left(u_1 - u_2\right) B_1 u_1 t_A = \frac{u_1}{2c}\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)(B_1 q)(u_1 t_A),$$

$$M_{\text{eject}} = \frac{4\pi}{3}(V_S t_A)^3 \rho_{\text{ISM}} \approx 10 M_{\odot}, \quad V_S = u_1 = 5 \cdot 10^8 \, см/с, \quad \rho_{\text{ISM}} = m_p n_p = 1.67 \cdot 10^{-24} \text{ гсм}^{-3},$$

$$t_A \approx 3 \cdot 10^{10} \, с, \qquad \sigma \approx 4, \qquad B_1 \approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ Гс} \qquad M_{\text{eject}} \frac{u_1^2}{2} = E_{\text{SN}}.$$

$$pc(\text{ГэВ}) \approx 300 B r_g (\text{Гс} \cdot \text{м})$$

$$\frac{B}{\text{Гс}} = \frac{1}{300} \frac{\text{эВ}}{\text{см} \cdot Z}. \quad \Rightarrow \quad E_{\max} \le 84\, Z \text{ ТэВ}$$

Энергии выше 100 ТэВ

Чтобы достичь более высоких энергий необходимы:

- **более интенсивные магнитные поля**
- **меньшие (?) коэффициенты диффузии**
- **большие скорости УВ (точнее $u_1 - u_2$) и скорости эжекты СН**
- **более благоприятные конфигурации магнитных полей**

$$B_{\parallel} \to B_{\perp} \to 10 \text{ ПэВ}$$

- **учет нелинейных эффектов**

Стадии разлета сброшенной оболочки (эжекты)

$$D_{\min} = \frac{1}{3} l_D c \Big|_{l_D = R_g} = \frac{1}{3} R_g c = \frac{pc^2}{3Bq} \approx \frac{Ec}{3Bq} \qquad (q = Ze) \qquad E_{\max} \le \frac{Zq}{2c}(u_1 - u_2) B_1 u_1 t_A = \frac{u_1}{2c}\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)(B_1 q)(u_1 t_A),$$

сферическая УВ

$$D(E) \le 0.1 u_1 R \quad \Rightarrow \quad E_{\max} = Z \frac{B_1}{10^{-6}\,\text{Гс}} \frac{R}{3\,\text{пк}} \frac{u_1}{3000\,\text{кмс}^{-1}} 10^{13}\ \text{эВ} \Big|_{\substack{R=5\,\text{пк} \\ u=5\cdot 10^3\,км/c \\ B=3\,мкГс}} \approx 80\,\text{ТэВ}$$

$$D_{\max}(E) \simeq 10^{28} (W_{51}/n)^{2/5} \text{см}^2\text{с}^{-1}$$

(W (эрг) -кин. энергия взрыва СН, W_{51} =W /10^{51})

(в начале стадии Седова) (на стадии 1 максим. скорости УВ - 20-30 тыс. км/с.)

1. Стадия свободного разлета, 10-300 лет – вся энергия взрыва в эжекте, в УВ – небольшая часть энергии (высокоскоростная компонента).

   Закон расширения - автомодельное решение Шевалье-Надежина: *R* ~ $t^{1-3/k}$ (однородная среда) и *R* ~ $t^{(k-3)/(k-2)}$ (звездный ветер), $k \approx 6 \div 9$.

2. Стадия Седова, 10^3 -10^5 лет – эжекта затормозилась и передала всю энергию УВ.

   Автомодельное решение Седова: *R* ~ $t^{2/5}$ (*k*=5) (однородная среда) и *R* ~ $t^{2/3}$ (звездный ветер).

3. Радиационная стадия – потери энергии на излучение приводят к плотной оболочке за фронтом УВ и к неэффективному ускорению КЛ .

Приближение магнитной гидродинамика (МГД)

$$1)\ v \sim V/L \ll \omega_g \ll \omega_{\text{coll}}, \quad \omega_g = eB/(mc),$$ ν- **характерные частоты**

$$2)\ \text{высокая электропроводность среды: } \sigma \gg \nu, \quad \sigma = 2\pi n e^2/(m\omega_{\text{coll}})$$

$$\omega_{\text{coll}} = \pi\lambda_i^2 n V_T, \quad \lambda_i = e^2/(3kT) \Rightarrow_{v} \omega_{\text{coll}} = \pi(e^2/3kT)^2 n V_T \sim nT^{-3/2};$$

$$\sigma \approx (kT)^{3/2}/(e^2\sqrt{m}) \approx 3\cdot 10^8 T^{3/2}\text{c}^{-1}$$

В обычной гидродинамике несжимаемых жидкостей НЕТ волновых решений. Звуковые волны (продольные колебания) возникают только в сжимаемой среде. Поперечные волны запрещены теоремой Кельвина, так как они связаны с переносом циркуляции в жидкости.

В МГД несжимаемых жидкостей МОГУТ возникать альвеновские волны - МГД-волны. Они распространяются со скоростью $\text{v}_a = B_0/\sqrt{4\pi\rho}$ **вдоль магнитных силовых линий во взаимно противоположных направлениях (без дисперсии).**

МГД-волна – поперечная: возмущения скорости δv **и магнитного поля** δB **перпендикулярны к направлению распространения волны и связаны соотношением** $\delta\vec{\text{v}} = -\delta\vec{B}/\sqrt{4\pi\rho}.$

Эффект Белла - усиление магнитного поля ОСН

Ток частиц, ускоряемых УВ, может привести к изменению дисперсионного соотношения для МГД волн : КЛ влияют на плазму через силу Лоренца $F_L = \frac{1}{c}[\vec{J}_{\rm CR} \times \vec{B}]$

Для $\vec{J}_{\rm CR} \parallel \vec{B}_0$ дисперсионное соотношение для альвеновских волн вдоль поля

имеет вид $\omega^2 = {\rm v}_a^2 k^2 - J_{\rm CR} \frac{B_0 k}{c\rho}$, где ${\rm v}_a = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho}}$ - альвеновская скорость.

$(\omega_a < \omega_{B_0} = eB_0/(m_{\rm ion}c))$ (H. Alfven, 1942)

При $\omega^2 < 0$, т. е. $k < k_0$, $k_0 = \frac{4\pi}{c}\frac{J_{\rm CR}}{B_0}$ (из условия $k_M B_0 \cong \frac{4\pi}{c} j_{CR}$

$\gamma_M = k_M v_A$ $\quad k_M r_L = \xi_{CR} \frac{1}{\Lambda}\left(\frac{v_{sh}}{V_A}\right)^2 \left(\frac{v_{sh}}{c}\right) \gg 1$ $\quad \Lambda = \ln\left(\frac{p_{max}}{m_p c}\right)$

возникает неустойчивость, приводящая к экспоненциальному расширению магнитной спирали в плоскости, перпендикулярной среднему магнитному полю.

Неустойчивость насыщается когда F_L становится сравнимой с силой натяжения силовых линий вмороженного в плазму магнитного поля: $kB \sim \frac{4\pi}{c} J_{\rm CR}$.

Используя гирорадиус как масштаб, находят усиление магнитного поля:

$$\frac{B^2}{4\pi} \sim 3\frac{u}{c} P_{\rm CR} = \frac{u}{c}\frac{\rho u^2/2}{\ln(E_{\max}/mc^2)},$$

(P_{CR} - *парциальное* давление частиц КЛ с энергией вблизи $E_{\max}$)

Нелинейный эффект позволяет достичь в ОСН энергий ~ 10^{17} эВ.

Спектр частиц, ускоренных в источниках

Диффузионный механизм - стохастическое ускорение на фронтах ударных волн

$$\frac{dE}{dt} = \xi(E) Zec^2 B \qquad \xi = \left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle \cong \frac{4}{3}\frac{u_1 - u_2}{c} = \frac{4}{3}\beta$$

Спектр протонов в источнике

$$\frac{dN_p}{dE} \cong C\left(\frac{E}{E_0}\right)^{-(2+4c_s^2/V_S^2)} \propto E^{-\alpha}, \alpha \cong 2 + \varepsilon$$

Ультрарелятивистские ударные волны

УВ с $\Gamma \sim 10^3$

$$E_p = \Gamma m_p,$$

$$E = \Gamma E_p (1 + \cos\theta) \approx \Gamma^2 m_p \quad \Rightarrow \quad E \approx \Gamma^4 m_p \Big|_{\Gamma = 10^3} \approx 10^{12}\ \text{ГэВ}$$

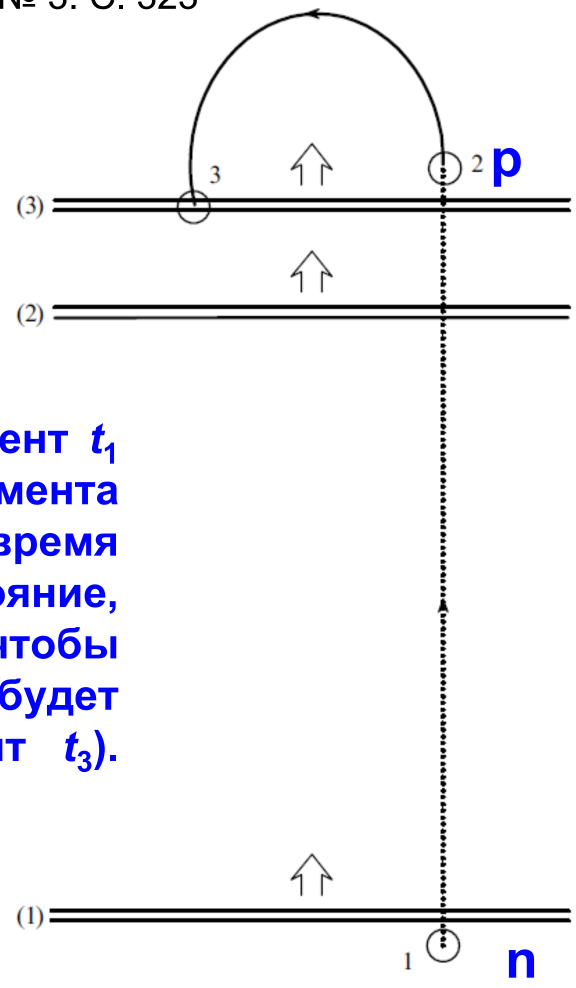
Конверсионный механизм ускорения частиц

УФН 2007. Т.177, № 3. С. 323

$$p + \gamma \rightarrow \Delta^{+} \rightarrow n + \pi^{+} \ (1/3)$$

$$p + \gamma \rightarrow \Delta^{+} \rightarrow p + \pi^{0} \ (2/3)$$

$$n + \gamma \rightarrow \Delta^{0} \rightarrow p + \pi^{-}$$



Незаряженная частица отцепляется от УВ в момент t_1 (нейтрон), и движется прямолинейно до момента превращения в заряженную в момент t_2 . За это время частица обгоняет фронт УВ на некоторое расстояние, так что имеется достаточный запас времени, чтобы развернуться в магнитном поле прежде, чем она будет вновь подхвачена ударной волной (момент t_3). Фронт УВ в соответствующие моменты времени – (1), (2), (3).

График Хилласа (p, Fe)

$$E_{\max} = 7.7\cdot 10^{21}\left(\frac{B}{10^{6}G}\right)\left(\frac{R}{10^{13}cm}\right) эВ =$$

$$= 2.2\cdot 10^{18}\left(\frac{B}{\mu G}\right)\left(\frac{R}{1\,кпк}\right) эВ$$

$$r_{g} \approx \frac{1}{Z}\frac{E_{18}}{B_{-6}}\ \mathrm{kpc}$$

$$E_{\max} \sim Z\,\mathrm{e} \bullet B \bullet r_{g}$$

$$R \geq r_{g}$$

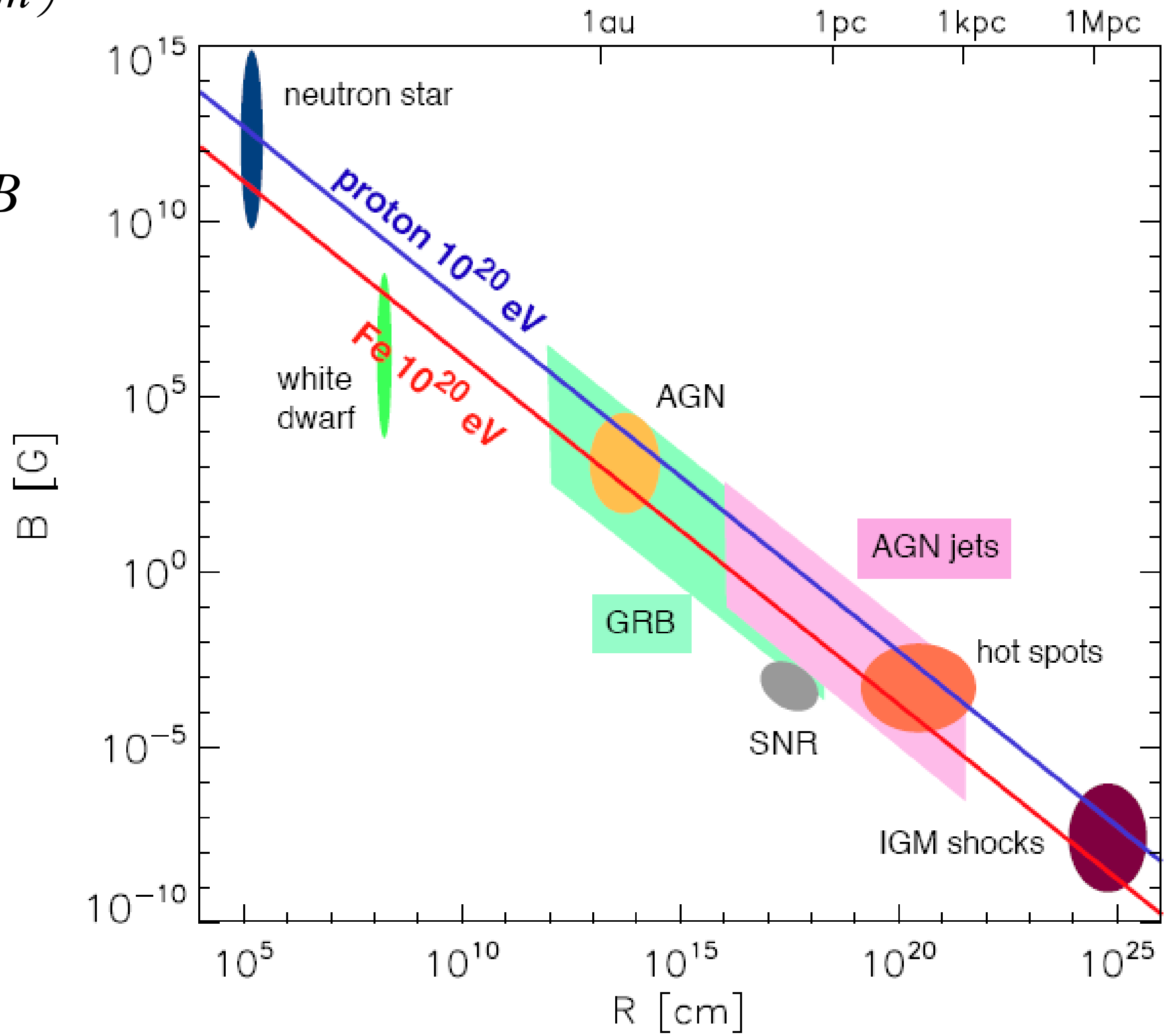


График Хилласа для протона

arXiv:1701.03731v1

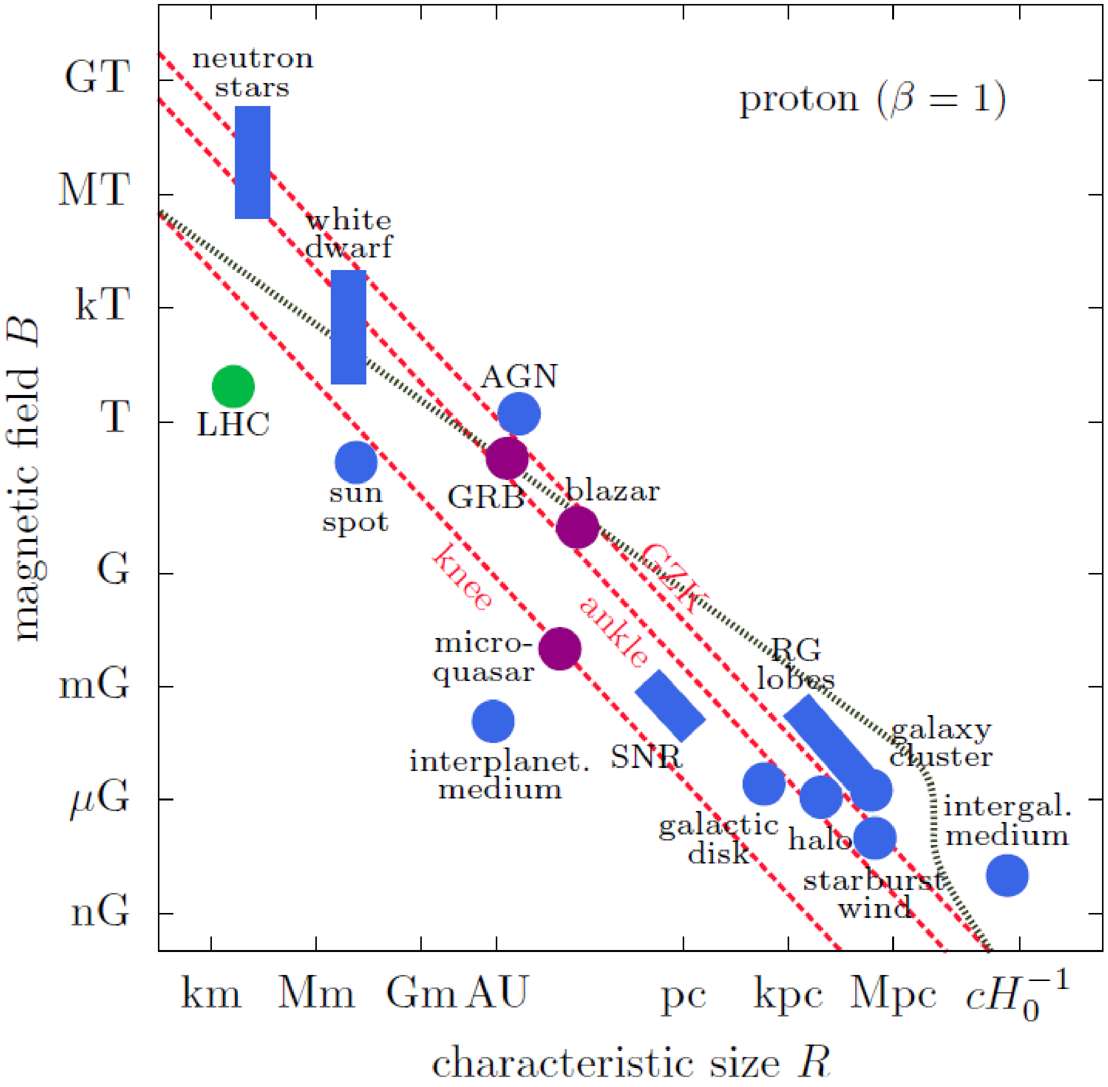


График Хилласа (Hillas plot) показывает верхние пределы энергии частиц космических лучей, достижимые в области ускорения размером L~ r_g и магнитным полем *B*.
Красные линии – энергии ГЗК, колена (knee) и лодыжки (ankle).
Серый пунктир - предел, возникающий от потерь энергии на синхротронное излучение в источниках и взаимодействие с реликтовым излучением.

The End